2.3-Les annuités variables :

2.3.1-Les annuités quelconques :

2.3.1.1-Les annuités quelconques de fin de période :

- **La valeur acquise :**

Si on note par :

-Vn = la valeur acquise par la suite des annuités.

-ap = l'annuité à la date p.

-n = le nombre de périodes (d'annuités)

-i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors :

$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i) + \ldots\ldots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \, (1+i)^{n-p}}$$

- **La valeur actuelle :**

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p \, (1+i)^{-p}}$$

2.3.1.2-Les annuités quelconques de début de période :

- **La valeur acquise :**

$$V_n = a_n\,(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \ldots\ldots + a_2\,(1+i)^{n-1} + a_1\,(1+i)^n$$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \, (1+i)^{n-p+1}}$$

- **La valeur actuelle :**

$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

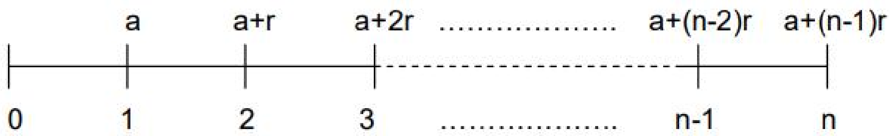
$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{-p+1}}$$

2.4- Les annuités en progression arithmétique :

2.4.1- Les annuités de fin de période en progression arithmétiques :

- **La valeur acquise :**

Soit une progression arithmétique d'annuités de raison r représentée par le graphique suivant :



$$V_n = (a+(n-1)r) + (a+(n-2)r)(1+i) + \ldots\ldots + (a+2r)(1+i)^{n-3} + (a+r)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

Ou encore,

$$V_n = \underbrace{[a + a(1+i) + \ldots. + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}]}_{= a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$+ \underbrace{[(n-1)r + (n-2)r(1+i) + \ldots.. + 2r(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}]}_{S}$$

Calculons S

$$S = (n-1)r + (n-2)r\,(1+i) + \ldots\ldots.. + 2r\,(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}$$

Calculons S(1+i)

$$S\,(1+i) = (n-1)r\,(1+i) + (n-2)r\,(1+i)^2 + \ldots\ldots.. + 2r\,(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-1}$$

Calculons S(1+i)-S

$$S(1+i)-S=\left[(n-1)r(1+i)+(n-2)r(1+i)^2+\dots\dots+2r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-1}\right]$$
$$-\left[(n-1)r+(n-2)r(1+i)+\dots\dots+2r(1+i)^{n-3}+r(1+i)^{n-2}\right]$$

$$S(1+i)-S=r(1+i)^{n-1}+r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-3}+\dots\dots+r(1+i)^2+r(1+i)-(n-1)r$$

$$=r(1+i)^{n-1}+r(1+i)^{n-2}+r(1+i)^{n-3}+\dots\dots+r(1+i)^2+r(1+i)+r-nr$$

$$=r\underbrace{\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+\dots\dots+(1+i)^2+(1+i)+1\right]}_{=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}}-nr$$

D 'où, $S(1+i)-S=r\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-nr$

Ou encore, $Si=r\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-nr$

Donc, $S=\dfrac{r}{i}\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-\dfrac{nr}{i}$

Or, $V_n=a\dfrac{(1+i)^n-1}{i}+S.$ On remplace S par son expression. On obtient:

$$V_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}+\frac{r}{i}\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}$$

Donc, $\boxed{V_n=\left(a+\dfrac{r}{i}\right)\dfrac{(1+i)^n-1}{i}-\dfrac{nr}{i}}$

Exemple :

Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période, en progression arithmétique dont les caractéristiques sont les suivantes :

-a = 1 000TND

-n = 5ans

-i = 5%

-r = 100TND

Solution:

On a $$V_n = \left(a+\frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n-1}{i} - \frac{nr}{i}.$$

D'où, $$V_5 = \left(1000+\frac{100}{0{,}05}\right)\left(\frac{(1{,}05)^5-1}{0{,}05}\right) - \frac{5\times 100}{0{,}05}$$

V_5 = 3000 (5,5256312) - 10 000 = 16 576,8936 - 10 000
V_5 = 6 576,894 TND

❖ La Valeur actuelle:

On sait que : $V_n = V_0(1+i)^n$ Donc: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

$$V_0 = (1+i)^{-n}\left[\left(a+\frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n-1}{i} - \frac{nr}{i}\right]$$

$$V_0 = \left(a+\frac{r}{i}\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) - \frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \left(a+\frac{r}{i}+nr\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) - \frac{nr}{i}}$$

2.4.2-Les annuités de début de période en progression arithmétique :

❖ La valeur acquise :

$$V_n = (a+(n-1)r)(1+i) + (a+(n-2)r)(1+i)^2 + ...+ (a+2r)(1+i)^{n-2} + (a+r)(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

$$V_n = (1+i)\times\underbrace{\left[(a+(n-1)r) + (a+(n-2)r)(1+i) + ...+ (a+2r)(1+i)^{n-3} + (a+r)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}\right]}_{=\left(a+\frac{r}{i}\right)\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]-\frac{nr}{i}}$$

$$\boxed{V_n = \left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i} - \frac{nr}{i}\times(1+i)}$$

❖ **La valeur actuelle :**

On sait que: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ <=> $V_0 = \left[\left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i} - \frac{nr(1+i)}{i}\right]\times(1+i)^{-n}$

$$\boxed{V_0 = \left(a+\frac{r}{i}\right)\times(1+i)\times\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{nr}{i}\times(1+i)^{-n+1}}$$

2.5-Les annuités en progression géométriques :

2.5.1-Les annuités de fin de période en progression géométrique :

❖ **La valeur acquise :**

Soit une progression géométrique d'annuités de fin de période de raison q représentée par le graphique suivant :

$$V_n = aq^{n-1} + aq^{n-2}(1+i) + \ldots + aq^2(1+i)^{n-3} + aq(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\ \underbrace{\left[(1+i)^{n-1} + q(1+i)^{n-2} + q^2(1+i)^{n-3} + \ldots + q^{n-2}(1+i) + q^{n-1}\right]}_{\text{Suite géométrique de } 1^{er} \text{ terme } (1+i)^{n-1}\text{, de raison } q\times(1+i)^{-1} = \frac{q}{1+i} \text{ et comprenant n termes}}$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{1+i}\right) - 1}\right] \quad \Leftrightarrow \quad V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{1+i}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{V_n = a\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

❖ **La valeur actuelle :**

On sait que : $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

alors $$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

2.5.2-Les annuités de début de période en progression géométrique :

❖ **La valeur acquise :**

$$\boxed{V_n = a(1+i)\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]}$$

❖ **La valeur actuelle :**

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times (1+i) \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}}$$