UNITÉ III : LES EMPRUNTS INDIVIS ET LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

3.1-Les emprunts indivis :

3.1.1-Définition :

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis. Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments :

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

Lorsque l'entreprise contracte un crédit auprès d'un organisme financier quelconque, elle est certainement appelée à rembourser ce crédit, que se soit par des versements constantes (ou non) à la fin de chaque période (mois, le semestre, l'année, etc) ou par un versement unique à la fin de la durée du crédit (remboursement in fine), le gestionnaire est alors appelé à comprendre les éléments du tableau de remboursement que la banque met à sa disposition. Ces éléments portent essentiellement sur le montant de l'intérêt, le montant de l'amortissement, la dette restant à rembourser, etc. L'application suivante permet d'illustrer le cas d'un emprunt indivis remboursé par des annuités constantes (modalité de remboursement la plus usitée). Chaque annuité comporte l'intérêt sur la dette vivante et le remboursement d'une partie de la dette (appelé amortissement).

3.1.2-Remboursement d'emprunt :

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \,.\, i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \,.\, i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \,.\, i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \,.\, i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \,.\, i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec :

C0 : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.

Ip : intérêt de la p ème période.

mp : amortissement de la p ème période.

ap : annuité de la p ème période.

Cp-1 : capital restant dû au début de la p ème période.

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté: $\boxed{\sum_{p=1}^{n} m_p = C_0}$

Après le paiement du $n^{ème}$ amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est à dire $C_{n-1} = m_n$

<u>Relation entre deux annuités successives :</u>

$$\begin{cases} a = m_p + I_p = m_p + C_{p-1} \times i \\ a = m_{p+1} + I_{p+1} = m_{p+1} + C_p \times i \end{cases}$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p + C_p \text{ x } i - C_{p-1} \text{x} i$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p \,(1+i)$$

❖ **<u>Remboursement in fine :</u>**

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

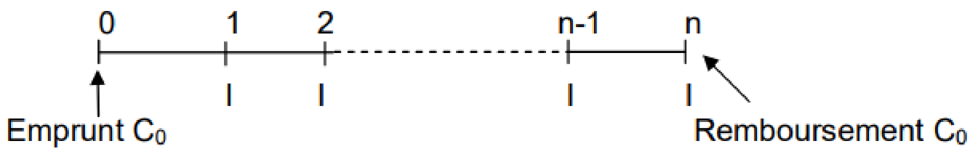

TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

❖ **<u>Remboursement par annuités constantes :</u>**

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \cdot i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \cdot i$	m_p	$a = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \cdot i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	m_n	$a = I_n + m_n$

On a, $a_1 = a_2 = ... = a_p = ... = a_n = a$
et, $a = m_n + I_n \Leftrightarrow a = m_n + C_{n-1}.i \Leftrightarrow a = m_n + m_n.i$

$\boxed{a = m_n(1+i)}$

- **Loi de succession des amortissements :**

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p(1+i)$
Et $a_{p+1} = a_p$

Alors $\boxed{m_{p+1} = m_p(1+i)}$

D'après la relation précédente, on aura:
$m_2 = m_1(1+i)$
$m_3 = m_2(1+i) = m1(1+i)^2$
$m_4 = m_3(1+i) = m1(1+i)^3$

$m_p = m_1(1+i)^{p-1}$

On a : $m_n = m_1(1+i)^{n-1}$
Or, $a = m_n(1+i)$
D 'où, $a = m_1(1+i)^{n-1}(1+i) = m_1(1+i)^n$

Donc: $\boxed{a = m_1(1+i)^n}$

- **Relation entre C0 et le premier amortissement (m1) :**

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + ... + m_n$$

$$C_0 = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + m_1(1+i)^3 + ... + m_1(1+i)^{n-1}$$

$$C_0 = m_1\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$\boxed{C_0 = m_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Et $\boxed{m_1 = C_0\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]}$

- **Relation entre C0 et l'annuité constante (a) :**

La valeur actuelle des annuités = C_0

$$\boxed{C_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

Et,

$$\boxed{a = C_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]}$$

Exemple :

Le tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes indique que les intérêts payés l'avant dernière année s'élèvent à 12300 dinars et les intérêts payés la dernière année sont égaux à 6300 dinars. Enfin, la différence entre les intérêts de la 1ère année et ceux de la 2ème année s'élève à 4061,040 dinars.

Déterminer i, a, m1 puis C0.

Solution :

On a I_{n-1} = 12300 dinars = $C_{n-2} . i = (m_{n-1} + m_n).i$
I_n = 6300 dinars = $C_{n-1}. i = m_n.i$
$I_1 - I_2$ = 4061,040 dinars = $C_0 . i - C_1 . i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$
On sait que: $m_n = m_{n-1}.(1+i)$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ (m_{n-1} + m_n) \times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left(m_n.(1+i)^{-1} + m_n\right) \times i = 12\,300 \text{ dinars} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left(m_n\left[1+(1+i)^{-1}\right]\right) \times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+(1+i)^{-1}} = \frac{6\,300}{12\,300}$$

$$\Rightarrow 12\,300 = 6\,300\left(1+(1+i)^{-1}\right) \Leftrightarrow (1+i)^{-1} = \frac{12\,300}{6\,300} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+i} = 0{,}952380952 \Leftrightarrow i = 0{,}05$$

i = 5%

$m_n .i$ = 6300 <=> m_n = 126 000 dinars

a = $m_n .(1+i)$ = 126000 (1 + 0,05) <=> a = 132300 dinars

$I_1 - I_2$ = 4061,040 = $C_0 . i - C_1 . i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{(I_1 - I_2)}{i} = \frac{4\,061{,}040}{0{,}05} = 81220{,}800 \text{ dinars}$$

$$a = m_1 + C_0 \times i \Leftrightarrow C_0 = \frac{(a - m_1)}{i} = \frac{(132\,300 - 81220{,}800)}{0{,}05}$$

C_0 = 1021584 dinars

- **Expression de la dette amortie et non amortie après le versement de la p éme annuité :**

Après le paiement de la pème annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements : Rp

$R_p = m_1 + m_2 + \ldots + m_p$

$$R_p = m_1\left[1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots\ldots+(1+i)^{p-1}\right]$$

$$R_p = m_1\left[\frac{(1+i)^p-1}{i}\right]. \text{Or}, m_1 = C_0\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

Alors, $$R_p = C_0\frac{i}{(1+i)^n-1}\left[\frac{(1+i)^p-1}{i}\right]$$

Donc $$\boxed{R_p = C_0\frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}}$$

La dette non amortie est égale à $C_0 - R_p$

- **Remboursement d'un emprunt par amortissements constants :**

Soit: C_0: le montant de l'emprunt
n : le nombre d 'annuités
m : amortissement constant

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{C_0}{n} \\ I_p &= C_{p-1}\times i \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Donc, les annuités ne sont pas constantes

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m	$a_1 = I_1+m$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m	$a_2 = I_2+m$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m	$a_p = I_p+m$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m	$a_{n-1} = I_{n-1}+m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m	$a_n = I_n+m$

- **Loi de succession des annuités :**

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p\ (1+i)$

or $m_{p+1} = m_p = \dfrac{C_0}{n}$

donc

$$\boxed{a_{p+1} = a_p - \frac{C_0}{n} \times i}$$

=> On remarque que les annuités sont en progression arithmétique de raison $\left(-\dfrac{C_0}{n} \times i\right)$

Exemple :

Un emprunt indivis contracté au taux annuel i est remboursable par 5 annuités : a1, a2, a3, a4, a5. Les amortissements successifs m1, m2, m3, m4 et m5 forment une progression géométrique de raison (1+k), k étant différent de i.

1) Sachant que :

- Les intérêts de la 2ème année I2 = 102102 dinars
- Les intérêts de la 4ème année I4 = 55902 dinars.
- le 2ème amortissement m2 = 440000 dinars.

Calculer i

2) Déterminer le montant de l'emprunt et dresser le tableau d'amortissement.

Solution :

On a $I_2 = 102102 = C_1 . i$

$I_4 = 55\,902 = C_3 . i$

$m_2 = 440\,000$

$I_2 = C_1 . i = (C_0 - m_1).i = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1).i$
$= (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i$

$I_4 = C_3 . i = [C_0 - (m_1 + m_2 + m_3)].i$
$= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1 - m_2 - m_3).i = (m_4 + m_5).i$

D 'où, $I_2 = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i = 102102$ (1)

$I_4 = (m_4 + m_5).i = 55902$ (2)

(1) - (2) => $(m_2 + m_3).i = 102102 - 55902 = 46200$ (3)

(2)/(3) => $\dfrac{(m_4 + m_5) \times i}{(m_2 + m_3) \times i} = \dfrac{55902}{46200} = 1{,}21$

$$\frac{m_4 + m_4(1+k)}{m_2 + m_2(1+k)} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4[1+(1+k)]}{m_2[1+(1+k)]} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4}{m_2} = 1{,}21$$

$$\text{Or, } m_4 = m_2(1+k)^2 \Rightarrow \frac{m_4}{m_2} = \frac{m_2(1+k)^2}{m_2} = 1{,}21 \Leftrightarrow (1+k)^2 = 1{,}21 = (1{,}1)^2$$

$\Rightarrow k = 10\%$

A partir de (3), on a:$(m_2 + m_3).i = 46\,200$ <=> $i = \frac{46\,200}{m_2 + m_3}$

$$\Leftrightarrow i = \frac{46\,200}{440\,000 + 440\,000(1,1)} = 0{,}05$$

Donc $i = 5\%$

2) $$C_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_1(1+k) + m_1(1+k)^2 + m_1(1+k)^3 + m_1(1+k)^4$$

$$\Leftrightarrow C_0 = m_1 \frac{(1+k)^5 - 1}{k} \text{ or } m_1 = \frac{m_2}{1+k} = \frac{440000}{1{,}10} = 400\,000$$

$$\Leftrightarrow C_0 = 400\,000 \frac{(1{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 2\,442\,040 \Leftrightarrow$$ C_0 = 2442040 dinars

Le tableau d'amortissement de cet emprunt se présente comme suit:

Période	Capital restant du	Amortissement	Annuité	Intérêt
1	2442040	400000	122102	522102
2	2042040	440000	102102	542102
3	1602040	484000	80102	564102
4	1118040	532400	55902	588302
5	585640	585640	29282	614929